Aufgabe 1 *(gleichmäßige Konvexität von L^p)*
Zeigen Sie für $x \in [-1,1]$ die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{1}{2}(1+|x|^p) - \Big|\frac{1+x}{2}\Big|^p \geq \begin{cases} c(p)(1-x)^p & \text{für } 2 \leq p < \infty \\ c(p)(1+|x|)^{p-2}(1-x)^2 & \text{für } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Folgern Sie für $u, v \in L^p(\mu)$

$$\frac{1}{2}\big(\|u\|_{L^p}^p + \|v\|_{L^p}^p\big) - \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_{L^p}^p \geq \begin{cases} c(p)\|u-v\|_{L^p}^p & \text{für } 2 \leq p < \infty \\ c(p)\big(\|u\|_{L^p}^{p-2} + \|v\|_{L^p}^{p-2}\big)\|u-v\|_{L^p}^2 & \text{für } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Aufgabe 2 *(Kompaktheit der Einheitskugel)*
Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, also ein Euklidischer Vektorraum, der bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständig ist. Zeigen Sie: die Einheitskugel

$$K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

ist genau dann folgenkompakt, wenn X endlichdimensional ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 14.11.2011 vor der Vorlesung.